

q1) Le système  $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=6 \\ y+z=1 \end{cases}$  s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$

q2) Le système  $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=1 \\ z-w=0 \\ x+w=3 \end{cases}$  s'écrit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est inversible avec

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$